Keine Ahnung von Kreisgleichungen

Wie erstellt man eine

Kreisgleichung

???

Datei Nr. 22110

Stand 2.4.2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Auf meiner Mathe-CD gibt es schon mehrere Texte zum Kreis. Dennoch habe ich hier einen kurzen Text der Reihe „Keine Ahnung von …“ angefügt.

Er soll Schülern helfen, wenn sie Grundlagen vergessen haben. Und da reichen oft ein paar Seiten.

Für ein ausführlicheres Studium empfehle ich den Text „22111 Kreis 1“.

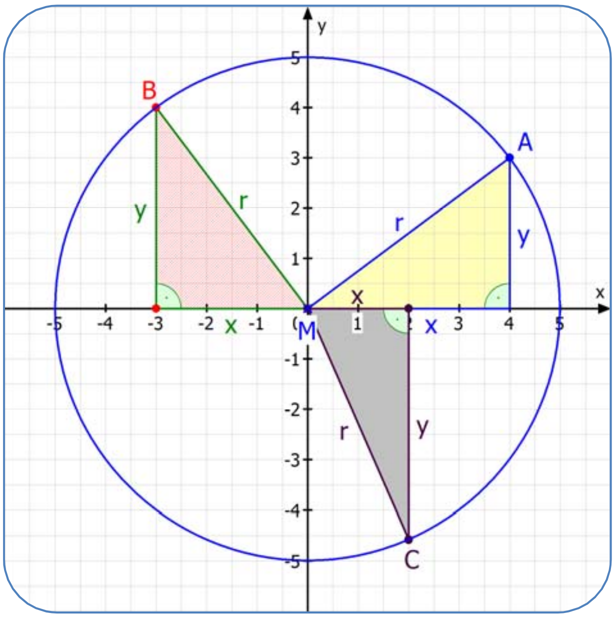
Inhalt:

1….Kreisgleichung ganz einfach

Wie kann man die Koordinaten von Punkten berechnen, die auf dem Kreis K um den Ursprung mit dem Radius r = 5 liegen?

Das ist supereinfach: **Du brauchst nur den Satz des Pythagoras anzuwenden.**

Die Abbildung zeigt diesen Kreis und drei Punkte A, B und C.



Beispielrechnung 1:

Der Punkt A oder B oder C soll auf K liegen.

Dann gilt für zugehörende Dreieck:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und weil der Radius 5 ist:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25} \quad (1)$$

Wir kennen $x_A = 4$. Setzt man dies in die Gleichung (1) ein folgt:

$16 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{9} \approx \pm 3$

Für A kommt nur y = +3 in Frage: $A(4 \mid 3)$.

Man sieht jetzt schon, dass die Zuordnung $x \to y$ bei einem Kreis nicht eindeutig ist, denn er bietet zwei Zuordnungen an: $4 \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow -3 \end{cases}$

Da keine Eindeutigkeit vorliegt, stellt diese Zuordnung keine Funktion dar.

Der Punkt B soll auf K liegen. Nun nehmen wir an, dass wir $y_B = 4$ kennen.

Für alle Punkte dieses Kreises gilt die Gleichung (1), die man die **Kreisgleichung** nennt.

$x^2 + 16 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ Für B kommt nur x = -3 in Frage: $B(-3 \mid 4)$.

Zum Schluss der Punkt C bei x = 2.

Durch Einsetzen in die Kreisgleichung erhält man $4 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 21 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{21} \approx \pm 4{,}58$:

Der dargestellt Punkt hat also die Koordinaten: $C\left(2 \mid -\sqrt{21}\right)$

Zusatz: Man kann natürlich die Kreisgleichung dazu verwenden, für jeden neuen Punkt eine fehlende Koordinate zu berechnen.

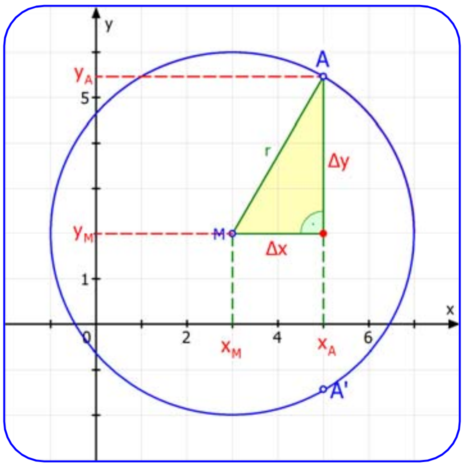
Günstiger ist es, die Kreisgleichung allgemein umzustellen. Dann kann man zwei Funktionen bilden, die als Schaubilder den oberen bzw. unteren Halbkreis haben:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{oH}(x) = \sqrt{25 - x^2} \\ f_{uH}(x) = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases}$$

Beide haben als Definitionsbereich das Intervall $\mathbb{D} = [-5\,;5\,]$.

2.…Kreisgleichung etwas komplizierter

Nämlich dann, wenn der Kreismittelpunkt nicht der Ursprung ist. Hier ist der Mittelpunkt $M(3\,|\,2)$.



Zum Kreispunkt A gehört das dargestellte rechtwinklige Dreieck. Auch hier liefert der Satz des Pythagoras die Bedingung dafür, dass A auf dem Kreis liegt. Man nennt diese Bedingung die **Kreisgleichung:**

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2 \qquad (1)$$

Dabei bedeuten $\Delta x = x_A - x_M$ und $\Delta y = y_A - y_M$

Das sind also die Differenzen der Koordinaten und somit die Längen im Dreieck. Δx liest man „Delta x".

Ausführlicher lautet dann (1): $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

wobei ich den Index A weggelassen habe, weil diese Gleichung für jeden Kreispunkt gilt.

Man merkt sich diese Gleichung so, dass von x bzw. y die Mittelpunktkoordinaten subtrahiert werden.

Anwendung dieser Kreisgleichung: Koordinatenberechnung von Punkten:

z. B.:

In der Abbildung liegt A bei x = 5. Berechne seine y-Koordinate!

Kreisgleichung hier: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

x = 5 einsetzen: $(\boxed{5} - 3)^2 + (y-2)^2 = 16 \iff 4 + (y-2)^2 = 16$

Nach y umstellen: $(y-2)^2 = 12$

Daraus folgt: $y - 2 = \pm\sqrt{12}$ bzw. $y_A = 2 + \sqrt{12}$ und $A\left(5\,|\,2+\sqrt{12}\right)$

Wie man sieht, gibt es noch einen zweiten Kreispunkt A' mit der x-Koordinate 5.

Es ist $A'\left(5\,|\,2-\sqrt{12}\right)$

Übung:

Die Gleichung $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 36$ gehört zum Kreis um $M(5\,|\,1)$ mit r = 6

Die Gleichung $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 20$ gehört zum Kreis um $M(-5\,|\,-1)$ mit $r = \sqrt{20}$.

Die Gleichung $x^2 + (y+4)^2 = 1$ gehört zum Kreis um $M(0\,|\,-4)$ mit r = 1

Die Gleichung $(x-10)^2 + y^2 = 10$ gehört zum Kreis um $M(10\,|\,0)$ mit $r = \sqrt{10}$

Die Gleichung $(x-5)^2 + (y-1)^2 = -16$ gehört zu keinem Kreis, denn $r^2 = -16$ hat keine reelle Lösung.

Die Gleichung $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 0$ stellt nur den Punkt $M(5\,|\,1)$ dar.

Wenn man auf die Idee kommt, diese Quadratklammern mit einer binomischen Formel umzurechnen, dem passiert z. B. folgendes:

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16} \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 16 \iff \boxed{x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3}$$

Diese Gleichung stellt zwar denselben Kreis dar, aber man erkennt nicht mehr den Mittelpunkt und Radius. Aber es ist möglich, diese Gleichung wieder in die Mittelpunktsform zurückzuführen.

Dazu schau dir bitte dies an: Du musst erkennen, was die ersten Schritte bei der Umrechnung sind. Denn diese müssen wir wieder rückgängig machen.

Die Mittelpunktsform lautet:
$$\overbrace{\left(x^2 \boxed{-6x} + 9\right)}^{(x-3)^2} + \overbrace{\left(y^2 \boxed{-4y} + 4\right)}^{(y-2)^2} = 16 \qquad (*)$$

Das Anwenden der binomischen Formel erzeugt bekanntlich 3 Glieder $(a-b)^2 = a^2 - \boxed{2ab} + b^2$.
Dabei wird von Schülern immer gerne das mittlere Glied vergessen, das sogenannte **doppelte Produkt** $\boxed{2ab}$. Dieses spielt bei der Umkehrung die Hauptrolle, denn es enthält den einzigen Hinweis auf die Koordinaten des Mittelpunkts: $x^2 + y^2 \;\boxed{-6x}\; \boxed{-4y} = 3$

Macht man die durch die binomische Formel erzeugte Verdopplung rückgängig, bleibt noch $\boxed{-3x}$ und $\boxed{-2y}$ übrig. Und genau diese Koeffizienten -3 und -2 stehen in der Kreisgleichung.

Wenn wir also nur diese Gleichung als Kreisgleichung kennen, kann man mit einem Blick ablesen:

$$x^2 + y^2 \underbrace{-6x}_{x_M=3} \underbrace{-4y}_{y_M=2} = 3$$

Man muss darauf achten, das Vorzeichen umzukehren: $M(3\,|\,2)$.

Diese schnelle Einsicht ist hilfreich, doch uns fehlt immer noch der Kreisradius.
Daher wendet man in der Regel diese andere Methode an. Man nennt sie

Quadratische Ergänzung:

Gegeben: $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$

Nach x und y ordnen: $\left(x^2 - 6x + \boxed{}\right) + \left(y^2 - 4y + \boxed{}\right) = 3 \qquad (**)$

Jetzt vergleiche bitte diese Gleichung (**) mit der oben dargestellten Gleichung (*).
In (**) fehlen in den Kästchen die Quadrate der Mittelpunktkoordinaten. Doch oben haben wir gelernt, dass man diese ablesen kann, wenn man 6 und 4 halbiert. Dann kann man quadrieren und einsetzen: $\left(x^2 - 6x + \boxed{}\right) + \left(y^2 - 4y + \boxed{}\right) = 3$

$:2 \qquad :2$

$(x-3)^2 \qquad (y-2)^2$

Also ergänzt man die Quadrate 9 und 4, ***aber auf beiden Seiten***, damit die Gleichung eine Gleichung bleibt: $\left(x^2 - 6x + \boxed{9}\right) + \left(y^2 - 4y + \boxed{4}\right) = \underbrace{3 + \boxed{9} + \boxed{4}}_{r^2=16}$

Ergebnis: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

Dieses Verfahren der <u>quadratischen Ergänzung</u> muss man üben:

(1) Gegeben: $x^2 + y^2 + 24x - 18y - 64 = 0$

Ordnen: $\left(x^2 + 24x + \square\right) + \left(y^2 - 18y + \square\right) = 64$

Ziel: $(x+12)^2 \quad + \quad (y-9)^2 \quad = \quad r^2$

Quadrate ergänzen: $\left(x^2 + 24x + \boxed{144}\right) + \left(y^2 - 18y + \boxed{81}\right) = 64 + \boxed{144} + \boxed{81}$

Ergebnis: $(x+12)^2 + (y-9)^2 = 289$

Mittelpunkt $M(-12\,|\,9)$, $r = \sqrt{289} = 17$

---

(2) Gegeben: $x^2 + y^2 - 5x + 9y = 0$

Ordnen: $\left(x^2 - 5x + \square\right) + \left(y^2 + 9y + \square\right) = 0$

Ziel: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \quad + \quad \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 \quad = \quad r^2$

Quadrate ergänzen: $\left(x^2 - 5x + \boxed{\tfrac{25}{4}}\right) + \left(y^2 + 9y + \boxed{\tfrac{81}{4}}\right) = 0 + \boxed{\tfrac{25}{4}} + \boxed{\tfrac{81}{4}}$

Ergebnis: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{106}{4}$

Mittelpunkt $M(2{,}5\,|\,-4{,}5)$, $r = \sqrt{\frac{106}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{106} \approx 5{,}15$

---

(3) Gegeben: $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 12 = 0$

Ordnen: $\left(x^2 + 3x + \square\right) + \left(y^2 + 4y + \square\right) = -12$

Ziel: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \quad + \quad (y+2)^2 \quad = \quad r^2$

Quadrate ergänzen: $\left(x^2 + 3x + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) + \left(y^2 + 4y + \boxed{4}\right) = -12 + \boxed{\tfrac{9}{4}} + \boxed{4}$

Ergebnis: $(x+1{,}5)^2 + (y+2)^2 = -\frac{23}{4}$

Diese Gleichung stellt keinen Kreis dar, denn für ihn wäre $r^2 < 0$, was nicht möglich ist.

---

(4) Variante zu (3)

> Für welche Werte von k stellt die folgende Gleichung einen Kreis dar?
>
> $x^2 + y^2 + 3x + 4y + k = 0$

Lösung:

Ordnen: $\left(x^2 + 3x + \square\right) + \left(y^2 + 4y + \square\right) = -k$

Ziel: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \quad + \quad (y+2)^2 \quad = \quad r^2$

Quadrate ergänzen: $\left(x^2 + 3x + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) + \left(y^2 + 4y + \boxed{4}\right) = -k + \boxed{\tfrac{9}{4}} + \boxed{4}$

Ergebnis: $(x+1{,}5)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4} - k$

Also ist $r^2 = \frac{25}{4} - k$: Das muss > 0 sein: $r^2 = \frac{25}{4} - k > 0 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{25}{4}$

Für diese Werte stellt die Gleichung einen Kreis dar.

3….Kreis durch drei Punkte

Musterbeispiel:

Gegeben sind die drei Punkte

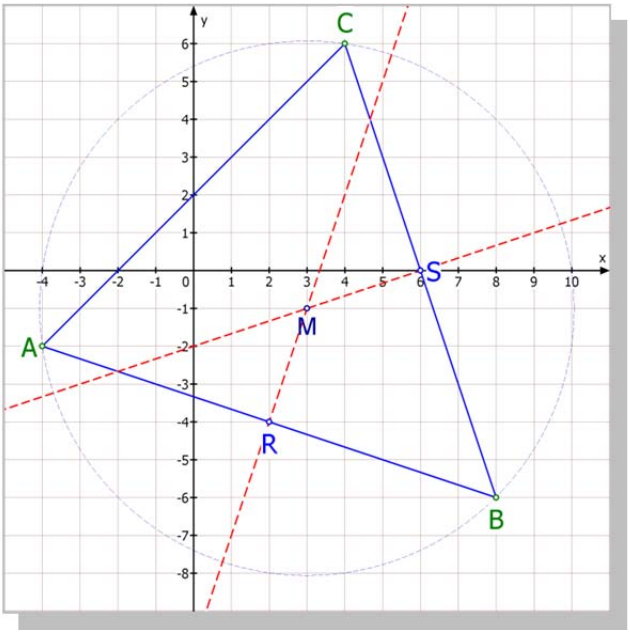
$A(-4\,|\,-2),\ B(8\,|\,-6),\ C(4\,|\,6).$

Bestimme die Gleichung des Kreises durch A, B und C.

Andere Formulierung: Welche Gleichung hat der Umkreis des Dreiecks ABC?

<u>Die Lösung folgt der Konstruktion.</u>

Der Mittelpunkt M hat von A, B und C denselben Abstand, nämlich r.
Alle Punkte, die von A und B denselben Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten zu AB.
Alle Punkte, die von B und C den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten zu BC.
Der Schnittpunkt beider Mittelsenkrechten ist der Kreismittelpunkt M.



1. Lösung – geometrischer Weg

1. Schritt: Aufstellung der Gleichung der Mittelsenkrechten zu AB.

Mittelpunkt von A und B: $R(2\,|\,-4)$

Steigung der Geraden AB: $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6-(-2)}{8-(-4)} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

Steigung der Mittelsenkrechten: $m_1 = -\frac{1}{m_{AB}} = 3$ (Negativer Kehrwert)

Punkt-Steigungs-Form: $y+4 = 3(x-2)$

Ergebnis: m_{AB}: $y = 3x-10$ (1)

2. Schritt: Aufstellung der Gleichung der Mittelsenkrechten zu BC.

Mittelpunkt von B und C: $S(6\,|\,0)$

Steigung der Geraden BC: $m_{BC} = \frac{6+6}{4-8} = \frac{12}{-4} = -3$

Steigung der Mittelsenkrechten: $m_2 = -\frac{1}{m_{BC}} = +\frac{1}{3}$ (Negativer Kehrwert)

Punkt-Steigungs-Form: $y-0 = \frac{1}{3}(x-6)$

Ergebnis: m_{BC}: $y = \frac{1}{3}x-2$ (2)

3. Schritt: Schnittpunkt der Mittelsenkechten m_{AB} und m_{BC}:

$3x-10 = \frac{1}{3}x-2 \quad |\cdot 3$

$9x-30 = x-6 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x_M = 3$

in (1): $y_M = -1$ Ergebnis: $M(3\,|\,-1)$

4. Schritt: <u>Radius</u>. $r = \overline{AM} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Ergebnis: Kreisgleichung: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 50$

2. Lösung – algebraischer Weg.

Betrachtet man die Kreisgleichung aus algebraischer Sicht, d. h. sie hat eine Lösungsmenge die - weil zwei Unbekannte x und y vorhanden sind, aus Zahlenpaaren besteht.

Die allgemeine Kreisgleichung lautet:

$$K: \quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

wenn a und b die Mittelpunktkoordinaten sind.

Die Gleichung hat also drei Unbekannte: a, b und r.

Kennt man drei Kreispunkte, dann sind das algebraisch gesehen drei Lösungspaare für die Kreisgleichung. Man kann also eine Punktprobe machen: $(x-3)^2+(y+1)^2=50$

$A(-4\,\vert\,-2)$	einsetzen:	$(-4-a)^2+(-2-b)^2=r^2$	(1)
$B(8\,\vert\,-6)$	einsetzen:	$(8-a)^2+(-6-b)^2=r^2$	(2)
$C(4\,\vert\,6)$	einsetzen:	$(4-a)^2+(6-b)^2=r^2$	(3)

Binomische Formeln anwenden:

$16+8a+a^2+4+4b+b^2=r^2$	(1)	
$64-16a+a^2+36+12b+b^2=r^2$	(2)	
$16-8a+a^2+36-12b+b^2=r^2$	(3)	

Hieraus erzeugen wir drei neue Gleichungen:

(1) - (2):	$-48+24a-32-8b=0$		
bzw.	$24a-8b-80=0$	(4)	$\vert :8$
(1) –(3):	$16a-32+16b=0$	(5)	$\vert :16$
(2) – (3):	$48-8a+24b=0$	(6)	$\vert :8$

Vereinfachung:	von (4)	$3a-b-10=0$	(7)
	von (5)	$a+b-2=0$	(8)
	Von (6)	$-a+3b+6=0$	(9)

Für zwei Unbekannte reichen zwei Gleichungen:

z. B.: $(7)+(8)$: $\quad 4a-12=0 \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow \boxed{a=3}$

in (8): $\quad 3+b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

Es fehlt noch der Radius:

Einsetzen z. B. in (1): $\quad 16+24+9+4-4+1=r^2$

$$r^2=50 \Rightarrow \boxed{r=\sqrt{50}}$$

Ergebnis: Durch A, B und C geht der Kreis $(x-3)^2+(y+1)^2=50$
mit $M(3\,|\,-1)$ und $r=\sqrt{50}$.